

Máximos y mínimos de una función

Estudio para funciones continuas:

Si f es una función dada, decimos que en un punto m de su dominio, existe un **máximo relativo** si existe un entorno a dicho punto (es decir un intervalo abierto) tal que, para cualquier valor de dicho intervalo abierto, la función es menor o igual que el máximo es decir

f tiene un **máximo relativo en M** si se cumple

$$\forall x \in (a, b) \text{ con } a < M < b, f(M) \geq f(x)$$

Y análogamente para el mínimo relativo, es decir, una función continua tiene un mínimo relativo en m , si en torno a dicho valor (es decir, para todo punto que tomemos en un intervalo abierto) se cumple que la función es mayor o igual que el mínimo, de manera que.

f tiene un **mínimo relativo en m** si se cumple

$$\forall x \in (a, b) \text{ con } a < m < b, f(m) \leq f(x)$$

Con esto quiero dejar claro que tanto un mismo máximo relativo como un mínimo relativo puede alcanzarse **INFINITAS VECES**. (y también los absolutos)

Es evidente que si el valor del máximo relativo M , es el más grande de todos, entonces tendrá un máximo absoluto, es decir:

f tiene un **máximo absoluto en M** si se cumple que

$$\forall x \in \text{Dom}f(x), f(M) \geq f(x)$$

Y análogamente para el mínimo absoluto, que será el valor más pequeño de todos los que tome la función, es decir

f tiene un **mínimo absoluto en m** si se cumple que

$$\forall x \in \text{Dom}f(x), f(m) \leq f(x)$$

Es importante observar, que la condición es necesaria pero no suficiente, es decir que para que la función tenga un máximo o un mínimo (del tipo que sea) NO ES SUFICIENTE con que para todo punto del entorno del máximo (análogamente para el mínimo), la función tome valores menores o iguales que los que toma en el máximo, basta con observar el siguiente ejemplo (ver Fig. 1), en donde la función constata $y=3$, no alcanza ningún extremo y sin embargo cumple con las condiciones descritas arriba.

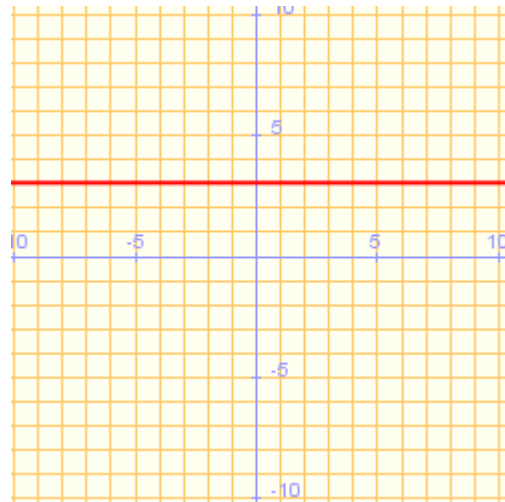
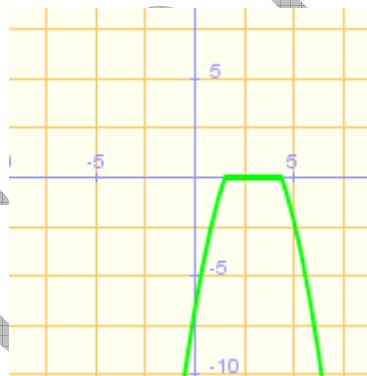


Fig. 1: Ilustración de una función que no alcanza ni máximo ni mínimo y cumple con la condición.

Teniendo esto en mente, pasemos al estudio de varias funciones que sirvan como ejemplo:

a)



Se trata de una parábola “achata” en torno al vértice. Corta a los ejes en los puntos $-\sqrt{2} + 3$ y $\sqrt{2} + 3$. Desde luego que cumple con la condición de **máximo absoluto** en los puntos que pertenecen al intervalo $[-\sqrt{2} + 3, \sqrt{2} + 3]$

b) Aquí tenemos el caso típico de una función cúbica, que alcanza un mínimo y un máximo relativos



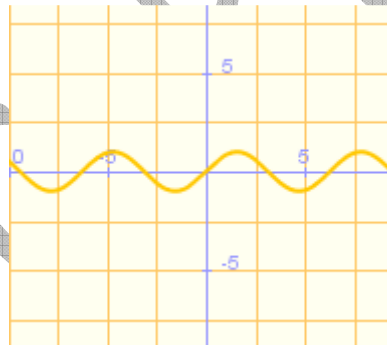
Hay que tener en cuenta, que como caso particular de la definición mostrada arriba, podríamos aplicar la siguiente:

Una función tiene un **máximo relativo en c**, si en un entorno de dicho punto, la función pasa de ser **CRECIENTE A DECRECIENTE**.

Una función tiene un **mínimo relativo en c**, si en un entorno de dicho punto, la función pasa de ser **DECRECIENTE A CRECIENTE**.

Que se cumplirán, lógicamente, con tal de tomar un entorno lo suficientemente grande. Este concepto tiene que ver con la derivada de la función y la tasa de variación media, que es de utilidad a la hora de calcular de forma exacta los puntos en donde la función alcanza los máximos y los mínimos.

c)



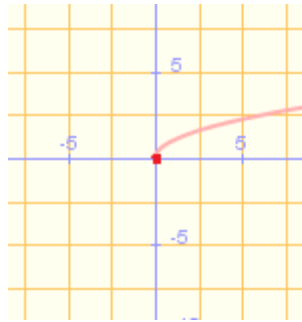
Función que estudiaremos en la próxima unidad y que se denomina seno y además como se puede comprobar es periódica (de periodo $T=2\pi$) Desde luego, alcanza máximos y mínimos absolutos en infinitos puntos, en particular

Máximos: $\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ en donde K toma los valores de los números enteros.

Mínimos: $\frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ en donde igualmente, K es un número entero -2,-1,0,1,2....

Observar que al ser periódica, los máximos y los mínimos se repiten al pasar un periodo, es decir, al sumar o restar 2π , es por eso, que hay que sumarle y restarle unidades de 2π .

d)



Aquí tenemos un ejemplo de función discontinua en 0 y sin embargo ahí también alcanza el mínimo absoluto, puesto que podemos encontrar un entorno a la derecha de dicho punto, de tal forma que la función toma valores más grandes. Luego de aquí deducimos que las discontinuidades pueden ser puntos críticos en donde hayan máximos o mínimos.

En general si la función tiene infinitas discontinuidades, no podremos aplicar el concepto, entonces (en caso de que no dispongamos de una gráfica) habrá que evaluar cada uno de los puntos y compararlos para ver cuál es el máximo y el mínimo.